16.01.2015

הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל
המרכז ללימודים קדם-אקדמיים

בחינת טרימסטר א׳ במתמטיקה - מועד ב׳

הנחיות לנבחן:

א. משך הבחינה **שעתיים**. אין לצאת ב- 45 הדקות האחרונות של הבחינה.
יש לרשום מהי כיתת האם על המחברת.

ב. יש לפתור את כל השאלות.

ג. מותר להשתמש בדפי הנוסחאות המצורפים בלבד.

ד. בכל שאלה חובה למצוא את כל התשובות. חובה לנמק כל תשובה ולפשטה ככל הניתן.

ה. כל נוסחה שנעשה בה שימוש ואינה מופיעה בדף הנוסחאות - חייבת הוכחה.

ו. כל משפט בגיאומטרית המישור שנעשה בו שימוש ושאינו מופיע ברשימת המשפטים - חייב הוכחה.

שאלה 1 (33%)

9% א. 1) ידוע שלמשוואה $(1-m)x^2 - 2x + 7 - 4m = 0$ יש שני שורשים בעלי סימנים נגדיים $x_1 < 0,\ x_2 > 0$.
הוכח כי $|x_1|^3 > x_2^3$.

9% 2) x_1, x_2 הם שורשים של משוואה ריבועית $2x^2 - x - 4 = 0$. רשום משוואה ריבועית ששורשיה הם $\frac{x_1}{x_1 - 1}\ ,\ \frac{x_2}{x_2 - 1}$. האם יש יותר ממשוואה אחת כזו?

9% ב. 1) צייר רשומת (סקיצה) של גרף הפונקציה $f(x) = \left| |x^2 - 2x - 4| - 4 \right|$
(אין חובה למצוא נקודות החיתוך עם ציר ה-"**x**").

6% 2) כמה פתרונות יש למשוואה $\left| |x^2 - 2x - 4| - 4 \right| = 2^{-|x|}$?

שאלה 2 (33%).

17% א. פתור: $25^{\log_3 x} - 5^{1+\log_9 x^2} + 5^{\log_5 4} \ge \log_{\sqrt{3}}\left(81\sqrt{3}\right) - 25^{\log_9 x}$.

16% ב. פתור:
$$\begin{cases} 2^{\sqrt{xy}-2} + 4^{\sqrt{xy}-1} = 5 \\ \dfrac{3(x+y)}{x-y} + \dfrac{5(x-y)}{x+y} = 8 \end{cases}$$

שאלה 3 (34%)

פתור בעזרת גיאומטרית המישור בלבד!

17% א. במשולש ABC: $AB = 10$, $D \in AB$, $AD = 4$, $E \in BC$, $BE = 15$, $K = CD \cap AE$, $CK : KD = 5:4$, $F \in BC$, $DF \parallel AE$. חשב את אורך הקטע BF ואורך הצלע BC.

17% ב. AD, BE, CF הם גבהים במשולש חד זווית ABC. הוכח כי
1) נקודות A, C, D, F נמצאות על מעגל אחד.
2) משולשים AEF, DBF, DEC, ABC דומים זה לזה.

בהצלחה!

1 ב

$(1-m)x^2 - 2x + 7 - 4m = 0$

1

$|x_1|^3 > x_2^3$ $\quad x_1 < 0$

$-x_1^3 > x_2^3 \quad / \sqrt[3]{\ }$

שני הצדדים חיוביים

$-x_1 > x_2$

$0 > x_1 + x_2$

$0 > \frac{-b}{a} \Rightarrow \frac{2}{1-m} < 0$

$+ \quad 1 \quad -$

$m > 1$

$x_1 < 0$

$x_2 > 0$ $\Rightarrow x_1 \cdot x_2 < 0$

$\frac{c}{a} < 0 \quad \frac{7-4m}{1-m} < 0$

$+ \quad 1 \quad - \quad \frac{7}{4} \quad +$

$\boxed{1 < m < \frac{7}{4}}$

לכן

מתקיים

2 c

$$2x^2 - x - 4 = 0$$

$$x_1 + x_2 = \frac{1}{2}$$

$$x_1 \cdot x_2 = -2$$

$$\frac{x_2}{x_2 - 1} + \frac{x_1}{x_1 - 1} = \frac{x_1x_2 - x_2 + x_1x_2 - x_1}{(x_2-1)(x_1-1)}$$

$$\frac{2x_1x_2 - (x_1+x_2)}{x_1 \cdot x_2 - (x_1+x_2) + 1} = \frac{-4 - \frac{1}{2}}{-2 - \frac{1}{2} + 1} = \frac{-\frac{9}{2}}{-\frac{3}{2}} = 3$$

$$\frac{x_2}{x_2 - 1} \cdot \frac{x_1}{x_1 - 1} = \frac{-2}{-\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}$$

$$\boxed{w \cdot \left(x^2 - 3x + \frac{4}{3}\right) = 0}$$

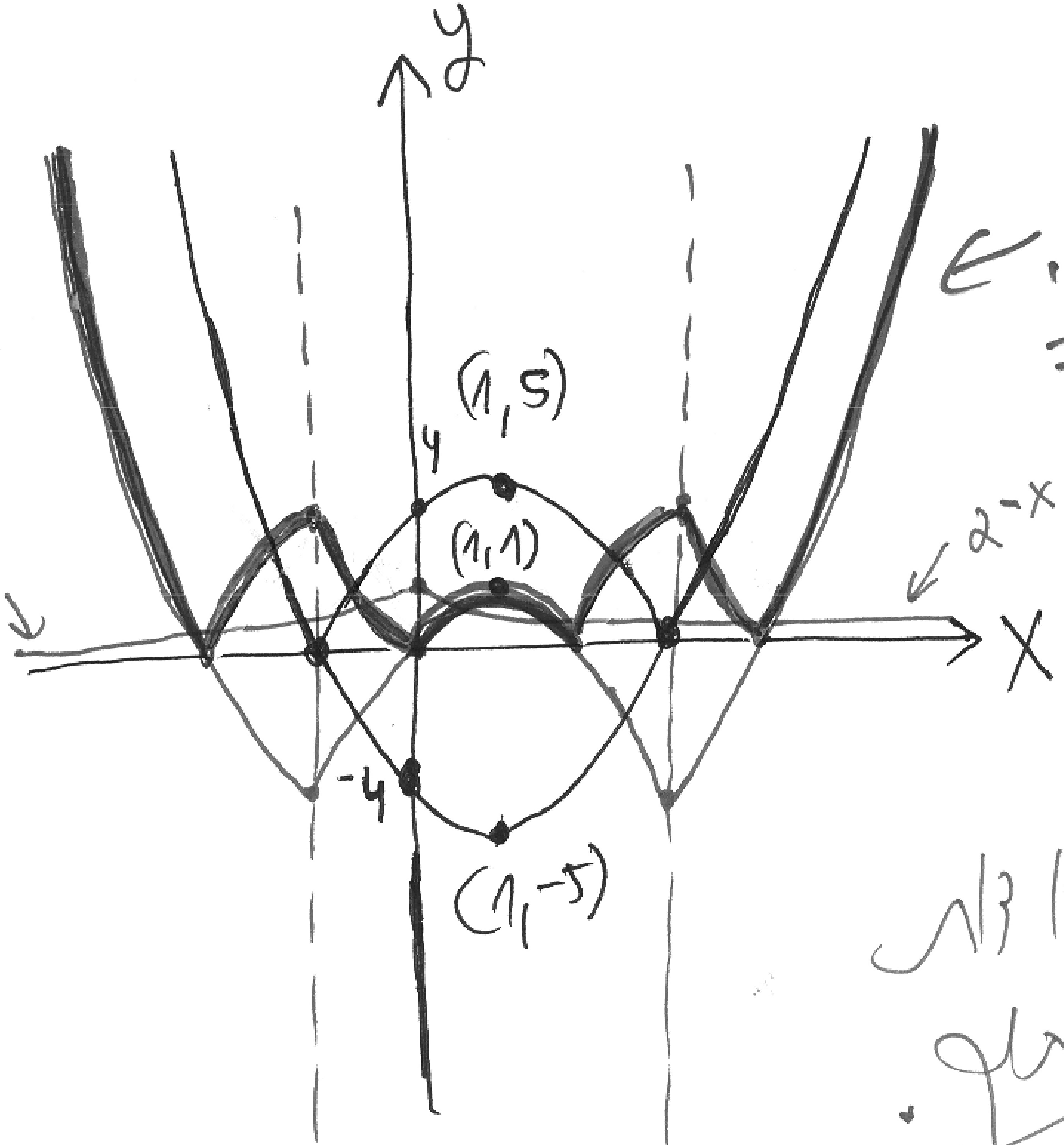
ד

ב

$y = x^2 - 2x - 4$

$\frac{-b}{2a} = 1$

$(1, -5)$



סופי

$y = \overbrace{|x^2 - 2x - 4|}^{\text{שיקוף}} \overset{\text{הורדה מטה}}{-4}$

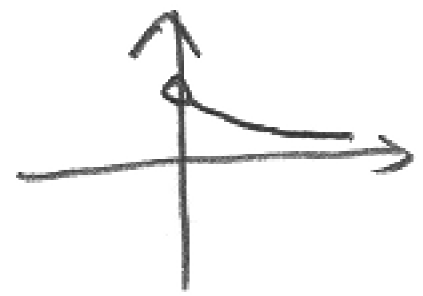
סופי $y = \underbrace{\big||x^2 - 2x - 4| - 4\big|}_{\text{שיקוף}}$

סה"כ

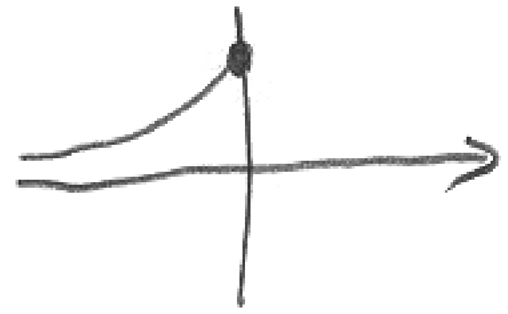
8 נקודות

מוחלט.

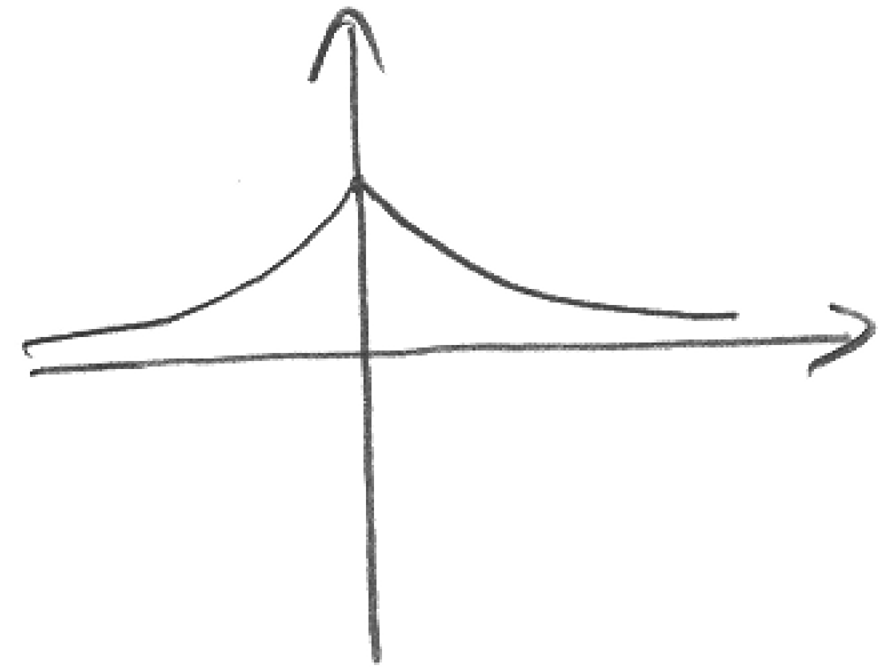
$y = 2^{-|x|}$ $\nearrow$ $x > 0 \Rightarrow y = 2^{-x}$



$\searrow$ $x \leq 0$ $y = 2^{x}$



$\Rightarrow$



② c

$$25^{\log_3 x} - 5^{1+\overbrace{\log_9 x^2}^{\log_3 x}} + \overbrace{5^{\log_5 4}}^{4} \geq \underbrace{\log_{\sqrt{3}} \overbrace{(81\sqrt{3})}^{(\sqrt{3}^9)}}_{9} - 25^{\log_9 x}$$

$$25^{\frac{1}{2}\log_3 x}$$

$\underline{x > 0}$

$$\log_3 x = t$$

$$5^{2t} - 5 \cdot 5^t + 4 \geq 9 - 5^t$$

$$5^{2t} - 4 \cdot 5^t - 5 \geq 0$$

$$(5^t - 5)(5^t + 1) \geq 0$$

$$5^t \geq 5$$

$$t \geq 1$$

$$\log_3 x \geq 1$$

$$\log_3 x \geq \log_3 3$$

$$\boxed{x \geq 3}$$

2

$$2^{\sqrt{xy}-2}+4^{\sqrt{xy}-1}=5$$

$$2^{\sqrt{xy}}=t \qquad 4^{\sqrt{xy}}=t^2$$

$$\frac{1}{4}t+\frac{1}{4}t^2=5$$

$$t^2+t-20=0$$

$$t=4 \qquad t=-5$$

$$2^{\sqrt{xy}}=2^2$$

$$\sqrt{xy}=2$$

$$\boxed{xy=4}$$

$xy=4$	$xy=4$
$x=4y$	$y=0$
$4y^2=4$	$\varnothing$
$y=1 \quad y=-1$	
$(4,1) \quad (-4,-1)$	

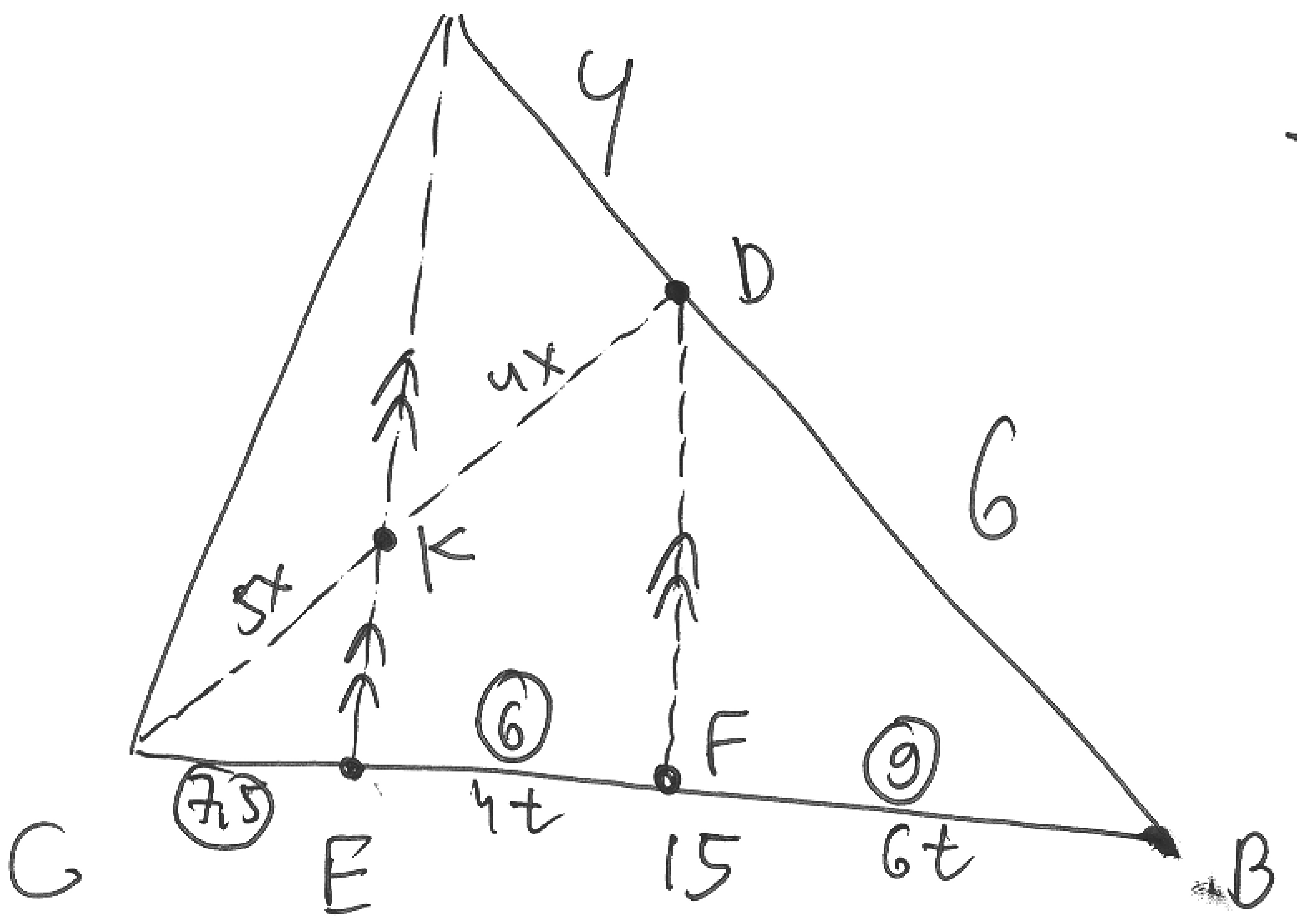
$$\frac{3(x+y)}{x-y}+\frac{5(x-y)}{x+y}=8$$

$$3w+\frac{5}{w}=8 \qquad \frac{x+y}{x-y}=w$$

$$3w^2-8w+5=0$$

$w=\frac{5}{3}$	$w=1$
$\frac{x+y}{x-y}=\frac{5}{3}$	$\frac{x+y}{x-y}=1$
$3x+3y=5x-5y$	$x+y=x-y$
$8y=2x$	$2y=0$
$4y=x$	$y=0$

4



$$\frac{CK}{KD} = \frac{5}{4}$$

$AE \parallel DF \Rightarrow \frac{BD}{DA} = \frac{BF}{FE}$

$4t + 6t = 15$

$10t = 15$

$t = 1.5 \to 6t = 9$

$\to 4t = 6$

$\boxed{BF = 9}$

$KE \parallel DF$

$\Downarrow$

$$\frac{CK}{KD} = \frac{CE}{EF}$$

$$\frac{5}{4} = \frac{CE}{6}$$

$\frac{30}{4} = 7.5 = CE$

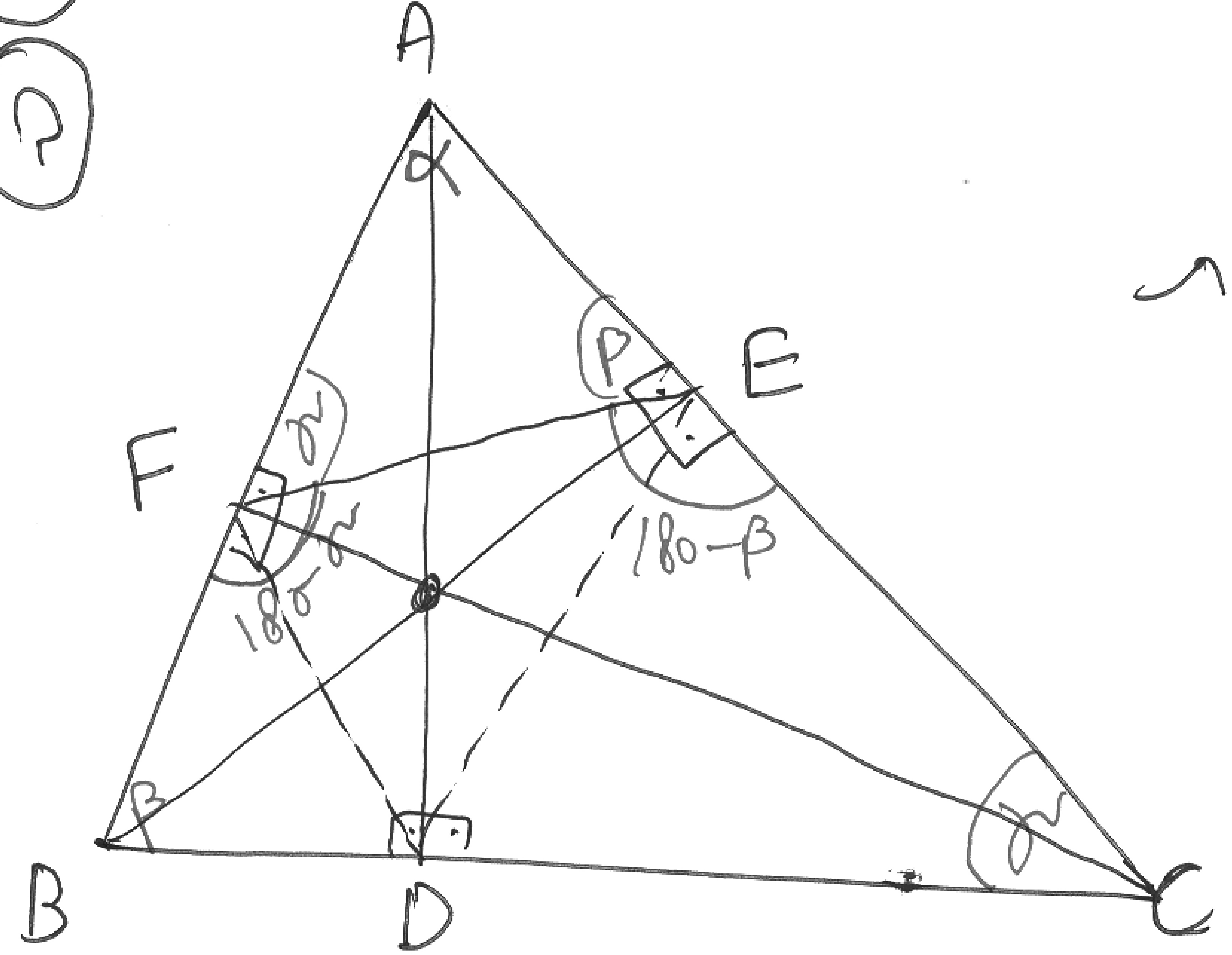
$CB =$

$7.5 + 15$

$\boxed{22.5}$

③ ב

השלמה לטרימסטר א׳:



A,C,D,F על מעגל אחד

שתי זוויות ישרות שנשענות על אותו יתר AC.

ABDE – בר חסימה.

BFEC – בר חסימה.